Teorema Chebysev

Bahan Kuliah *II2092 Probabilitas dan Statistik*

Oleh: Rinaldi Munir

Sekolah Teknik Elektro dan Informatika ITB

Teorema Chebyshev (1)

- Teorema Chebyshev:
  Probabilitas dari sembarang peubah acak m X dalam selang k simpangan baku dari rataan sekurang-kurangnya $1 - 1/k^2$, atau

$$P(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

Teorema Chebyshev (2)

- Bukti dari Teorema Chebyshev:

$$\sigma^2 = E[(X - \mu)^2]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\mu-k\sigma} (x-\mu)^2 f(x)\,dx + \int_{\mu-k\sigma}^{\mu+k\sigma} (x-\mu)^2 f(x)\,dx + \int_{\mu+k\sigma}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,dx$$

$$\geq \int_{-\infty}^{\mu-k\sigma} (x-\mu)^2 f(x)\,dx + \int_{\mu+k\sigma}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,dx$$

Teorema Chebyshev (3)

- Bukti dari Teorema Chebyshev (Lanjutan):

  Sekarang karena $|x-\mu| \geq k\sigma$, maka berlaku $(x-\mu)^2 \geq k^2\sigma^2$, sehingga kedua suku terakhir dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\sigma^2 \geq \int_{-\infty}^{\mu-k\sigma} k^2\sigma^2 f(x)\,dx + \int_{\mu-k\sigma}^{\infty} k^2\sigma^2 f(x)\,dx \text{ atau } \int_{-\infty}^{\mu-k\sigma} f(x)\,dx + \int_{\mu+k\sigma}^{\infty} f(x)\,dx \leq \frac{1}{k^2}$$

Sehingga diperoleh:

$$P(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma) = \int_{\mu-k\sigma}^{\mu+k\sigma} f(x)\,dx \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

Teorema Chebyshev (4)

- Contoh Penggunaan Teorema Chebyshev:

  Peubah acak X mempunyai rataan μ=8 dan variansi σ^2 = 9, serta distribusi peluang tidak diketahui. Tentukan $P(-4 < x < 20)$.

- Jawab:

  $P(-4 < x < 20) = P[8-(4)(3) < x < 8+(4)(2)] \geq \frac{15}{16}$